V-5 (1 h y 3 min) 9-Febrero-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Diagramas de Feynman** **Ecuación de Schwinger-Dyson en (0+0) D**

Se habla de **ACCIÓN** $\boldsymbol{S(\phi)}$ en el campo.

- Cuando no hay interacciones en el campo: $\boldsymbol{S(\phi)} = \frac{m^2}{2}\phi^2$
- Cuando hay interacciones (sencillas): $\boldsymbol{S(\phi)} = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$ (λ es "acoplamiento") [Z(J) = ∫ no gaussiana]

[No confundir con valores λ_i de matriz (D)]

Ecuación de Schwinger-Dyson: ec. diferencial con incógnita el Funcional Generador $Z[J] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-S+J\phi}\, d\phi$

1º caso: cuando no hay interacciones $\quad S(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad \Longrightarrow \quad S'(\phi) = m^2\phi$

Planteamos integral: $\int_{-\infty}^{+\infty} S' \cdot e^{-S+J\phi}\, d\phi = m^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi \cdot e^{-S+J\phi}\, d\phi = m^2 Z'[J]$

Planteamos: $\frac{\partial}{\partial\phi}\left(e^{-S+J\phi}\right) = (-S' + J)e^{-S+J\phi} \quad \Longrightarrow \quad \left[e^{-S+J\phi}\right]_{-\infty}^{+\infty} = -\int_{-\infty}^{+\infty} S' e^{-S+J\phi}\, d\phi + J\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-S+J\phi} d\phi$

$$\left[e^{-S+J\phi}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \left[e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2+J\phi}\right]_{-\infty}^{+\infty} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} S' \cdot e^{-S+J\phi}\, d\phi = J\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-S+J\phi} d\phi = J \cdot Z[J]$$

Igualando vemos que el Funcional Z_0 (sin interacciones) cumple la ec..diferencial: $\boldsymbol{m^2 Z'_0[J] = J \cdot Z_0[J]}$ **(I)**

Se resuelve fácilmente la ecuación (I), y se obtiene igual que en (II) del resumen de V-4: $Z_0[J] = \frac{\sqrt{2\pi}}{m} \cdot exp\left[\frac{J^2}{2m^2}\right]$

2º caso: cuando hay interacciones (sencillas): $S(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad \Longrightarrow \quad S'(\phi) = m^2\phi + \frac{\lambda}{6}\phi^3$

EJERCICIO 1: Planteando un operativo igual se obtiene ec.diferencial: $\boldsymbol{m^2 Z'[J] + \frac{\lambda}{6} Z'''[J] = J \cdot Z[J]}$ **(II)**

Las ecuaciones **(I)** y **(II)** son ecuaciones de Schwinger-Dyson en dos casos diferentes. ¿Hay una ecuación general?

Calculo del valor de promedio (esperado): $\langle \phi^p \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdot \phi^p \cdot e^{-S(\phi)}\, d\phi}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-S(\phi)}\, d\phi \cdot} = \boldsymbol{\frac{Z^{(p^a)}[0]}{Z\,[0]}}$ (V) del resumen deV-4

1º caso: cuando no hay interacciones $\quad S(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad \Longrightarrow \quad Z_0[J] = \frac{\sqrt{2\pi}}{m} \cdot exp\left[\frac{J^2}{2m^2}\right]$

Es aplicable la expresión (III) del resumen de V-4: $\langle \phi^p \rangle_0 = \frac{Z_0^{(p^a)}[0]}{Z_0\,[0]} = \frac{(p-1)\cdot(p-3)\ldots5\cdot3\cdot1}{m^p}$

2º caso: hay interacciones (sencillas): $S(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad \Longrightarrow \quad Z[J] = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{e^{-S(\phi)+\phi\cdot J}}\, d\phi = No\ gaussiana$

Habría que hallar $Z[J]$ resolviendo la ec. diferencial **(II)** de Schwinger-Dyson y luego aplicar (V) del resumen V-4.

En vez de resolver ec. diferencial **(II), podemos,** con Taylor, aproximar una expresión de $Z[J]$ y luego, aplicando (V) del resumen V-4, aproximar valor de $\langle \phi^p \rangle$

$$Z[J] = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{e^{-S(\phi)+\phi\cdot J}}\, d\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{24}\phi^4 + \phi\cdot J}}\, d\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\boldsymbol{e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2 + \phi\cdot J}}\right)\left(\boldsymbol{e^{-\frac{\lambda}{24}\phi^4}}\right) d\phi$$

Consideramos $\boldsymbol{f(\lambda) = e^{-\frac{\lambda}{24}\phi^4}}$. Como λ<<1, podemos desarrollarla en entorno de λ= 0 por Taylor (hasta 2º orden):

$$\left(\boldsymbol{e^{-\frac{\lambda}{24}\phi^4}}\right) \approx 1 - \frac{\phi^4}{24}\boldsymbol{\lambda} + \frac{\phi^8}{1152}\boldsymbol{\lambda^2} \quad \to \quad Z[J] \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\boldsymbol{e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2 + \phi\cdot J}}\right)\left(1 - \frac{\phi^4}{24}\lambda + \frac{\phi^8}{1152}\lambda^2\right) d\phi$$

Teniendo en cuenta $Z_0[J] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2 + \phi\cdot J}\, d\phi$ y sus sucesivas derivadas respecto de J hasta $\boldsymbol{Z_0^{(8^a)}(J)}$, queda:

$$Z[J] \approx Z_0[J] - \frac{\lambda}{24} \cdot Z_0^{(4^a)}[J] + \frac{\lambda^2}{1152} \cdot Z_0^{(8^a)}[J]$$

Vemos que Z[J] en general se pone aproximadamente en función de Z_0[J] libre de interacciones y sus derivadas. Sacamos factor común y queda:

$$Z[J] \approx Z_0[J]\left(1 - \frac{\lambda}{24} \cdot \frac{Z_0^{(4^a)}(J)}{Z_0[J]} + \frac{\lambda^2}{1152} \cdot \frac{Z_0^{(8^a)}(J)}{Z_0[J]}\right) \quad \xrightarrow{Si\ J=0} \quad Z[0] \approx Z_0[0]\left(1 - \frac{\lambda}{24} \cdot \langle \phi^4 \rangle_0 + \frac{\lambda^2}{1152} \cdot \langle \phi^8 \rangle_0\right)$$

Aplicando (III) del resumen de V-4, nos queda:

$$Z[0] \approx Z_0[0]\left(1 - \frac{\lambda}{24} \cdot \frac{3}{m^4} + \frac{\lambda^2}{1152} \cdot \frac{7\cdot5\cdot3}{m^8}\right) \quad \to \quad Z[0] \approx Z_0[0]\left(1 - \frac{1}{8\cdot m^4} \cdot \lambda + \frac{35}{384\cdot m^8}\lambda^2\right)$$

Para aplicar (V) del resumen V-4, necesitamos encontrar $Z^{(p^a)}[J]$ y hacer $Z^{(p^a)}[0]$.

Derivamos la expresión aproximada, encontrada anteriormente de $Z[J] \approx Z_0[J] - \frac{\lambda}{24} \cdot Z_0^{(4^a)}[J] + \frac{\lambda^2}{1152} \cdot Z_0^{(8^a)}[J]$

$Z'[J] \approx Z'_0[J] - \frac{\lambda}{24} \cdot Z_0^{(5^a)}[J] + \frac{\lambda^2}{1152} \cdot Z_0^{(9^a)}[J]$ Si concretamos en hallar $\langle \phi^2 \rangle = \frac{\boldsymbol{Z''[0]}}{\boldsymbol{Z\,[0]}}$ derivamos hasta **Z´´**

$Z''[J] \approx Z''_0[J] - \frac{\lambda}{24} \cdot Z_0^{(6^a)}[J] + \frac{\lambda^2}{1152} \cdot Z_0^{(10^a)}[J] \quad \rightarrow \quad Z''[J] \approx Z''_0[J] - \frac{\lambda}{24} \cdot Z_0^{(6^a)}[J] + \frac{\lambda^2}{1152} \cdot Z_0^{(10^a)}[J]$

....

Igual que antes, sacamos factor común $Z_0[J]$:

$$Z''[J] \approx Z_0[J]\left(\frac{Z''_0[J]}{Z_0[J]} - \frac{\lambda}{24} \cdot \frac{Z_0^{(6^a)}[J]}{Z_0[J]} + \frac{\lambda^2}{1152} \cdot \frac{Z_0^{(10^a)}[J]}{Z_0[J]}\right) \xrightarrow{Si\ J=0} Z''[0] \approx Z_0[0]\left(\langle \phi^2 \rangle_0 - \frac{\lambda}{24} \cdot \langle \phi^6 \rangle_0 + \frac{\lambda^2}{1152} \cdot \langle \phi^{10} \rangle_0\right)$$

Aplicamos (III) de resumen de V-4 y nos queda:

$$Z''[0] \approx Z_0[0]\left(\frac{1}{m^2} - \frac{\lambda}{24} \cdot \frac{5\cdot 3}{m^6} + \frac{\lambda^2}{1152} \cdot \frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{m^{10}}\right) \rightarrow Z''[0] \approx Z_0[0]\left(\frac{1}{m^2} - \frac{5}{8\cdot m^6}\lambda + \frac{105}{128\cdot m^{10}}\lambda^2\right)$$

Finalmente, hallamos $\langle \boldsymbol{\phi^2} \rangle = \frac{\boldsymbol{Z''[0]}}{\boldsymbol{Z\,[0]}} \approx \frac{Z_0[0]\left(\frac{1}{m^2} - \frac{5}{8\cdot m^6}\lambda + \frac{105}{128\cdot m^{10}}\lambda^2\right)}{Z_0[0]\left(1 - \frac{1}{8\cdot m^4}\cdot\lambda + \frac{35}{384\cdot m^8}\lambda^2\right)} \approx \frac{\frac{1}{m^2} - \frac{5}{8\cdot m^6}\lambda + \frac{105}{128\cdot m^{10}}\lambda^2}{1 - \frac{1}{8\cdot m^4}\cdot\lambda + \frac{35}{384\cdot m^8}\lambda^2} = f(\lambda)$

Este resultado aproximado $\langle \phi^2 \rangle \approx f(\lambda)$**,** a su vez puede aproximarse con Taylor (puesto que λ << 1) a polinomio de primer orden en entorno de λ = 0. Tras cálculos con programa Scientific Works Place 5,5:

$$\langle \boldsymbol{\phi^2} \rangle \approx f(\lambda) \approx f(0) + f'(0) \cdot \lambda \approx \boldsymbol{\frac{1}{m^2} - \frac{\lambda}{2m^6}}$$

Vemos la dificultad de cálculo para hallar $\langle \boldsymbol{\phi^2} \rangle$ (tan sólo p=2) en aproximación a polinomio tan sólo de 1º orden

(**EJERCICIO 2**) Aproximar $\langle \boldsymbol{\phi^2} \rangle$ a polinomio de 2º orden**.** Hacerlo de dos formas: con cálculo directo y con los diagramas de Feynman

Diagramas de Feynman: Su objetivo es calcular valores promedio $\langle \phi^p \rangle$ de forma gráfica mediante la suma de los valores asignados a cada uno de los diagramas posibles. Aunque no estoy seguro de que sean éstas, pongo en la siguiente tabla las que, viendo el video, me ha parecido entender como reglas básicas de dichos diagramas:

Reglas de construcción de diagramas	Posibilidades de diagramas
Hay que poner "p" puntos negros y unirlos por parejas con líneas (propagadores) de forma que de cada punto negro sale, o entra, una sola línea (una sola pata)	Se unen esos puntos negros de todas las formas posibles, siempre por parejas.
Si hay interacciones, en cada línea propagadora se intercalan "n" puntos rojos (aproximación a orden "n"), en cada orden progresivo de aproximación. De cada punto roja salen, o entran, cuatro líneas (cuatro patas), que tienen que llegar a otro punto rojo o negro.	Diagramas con orden de aproximación: 0, 1… n Las 4 líneas de los puntos rojos tienen que llegar a algún otro punto, rojo o negro, de todas las formas posibles.
Los bucles de las líneas se puede imaginar que se dibujan sin levantar el lápiz en diferentes sentidos y recorridos	Hay varias posibilidades de recorrer los bucles sin levantar el lápiz. El número "s" de estas diferentes posibilidades determina el factor de simetría de cada diagrama.

El valor asignado a cada diagrama lo podemos expresar de forma genérica:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}_i = \left(\frac{1}{m^2}\right)^t \cdot (-\lambda)^n \cdot \frac{1}{s}} \qquad \textbf{(III)}$$

"t" es el número de tramos, entre puntos (negros o rojos), de líneas propagadoras que tiene ese diagrama.
"n" es el número de puntos rojos que se intercalan (orden de aproximación que se pretende)
"s" el número de posibilidades de dibujar sin levantar el lápiz los bucles de ese diagrama.

$$\boldsymbol{\langle \phi^p \rangle = \textstyle\sum_i \mathcal{M}_i} \qquad \textbf{(IV)}$$

Ver ejercicios resueltos expuestos en formulario de Crul